Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Мітельман І.М. Навчання розв'язування олімпіадних задач, пов'язаних із цілою частиною дійсного числа, за допомогою властивостей точок розриву кусково-сталих функцій. Фізико-математична освіта. 2019. Випуск 2(20). С. 107-113.

Mitelman I. On Teaching Solving Olympiad-Type Problems Related To Integer Part Of Real Number Using The Properties Of Discontinuity Points Of Step Functions. Physical and Mathematical Education. 2019. Issue 2(20). P. 107-113.

DOI 10.31110/2413-1571-2019-020-2-017
УДК 372.851:[378.046.4+378.016]:517.1

І.М. Мітельман
Комунальний заклад вищої освіти «Одеська академія неперервної освіти Одеської обласної ради», Україна
i.m.mitelman@gmail.com
ORCID: 0000-0002-9817-6690

НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ, ПОВ'ЯЗАНИХ ІЗ ЦІЛОЮ ЧАСТИНОЮ ДІЙСНОГО ЧИСЛА, ЗА ДОПОМОГОЮ ВЛАСТИВОСТЕЙ ТОЧОК РОЗРИВУ КУСКОВО-СТАЛИХ ФУНКЦІЙ

АНОТАЦІЯ

Практика викладання математики та його науково-методичного супроводу переконливо свідчить про те, що задачі про цілу (дробову) частину дійсного числа традиційно акумулюють значний пласт навичок учнів, вимагають високої аналітичної культури, технічної винахідливості. Така тематика є актуальною складовою реалізації надважливої функціональної лінії підготовки школяра й студента, підвищення кваліфікації вчителя в питаннях застосування різноманітних властивостей функцій, вимагає навичок алгебраїчних, комбінаторних, теоретико-числових міркувань.

***Формулювання проблеми**. Виникає проблема пошуку та/або модернізації апарату дієвих методичних та математичних прийомів навчання розв'язування задач підвищеного рівня складності, пов'язаних із цілою та дробовою частиною числа, серед яких завжди виділяються задачі математичних олімпіад як індикатор якості сформованої фахової компетентності.*

***Матеріали і методи**. У статті розглядається з теоретичної та практичної точки зору питання навчання розв'язування певних типів задач, пов'язаних із цілою частиною числа, шляхом створення прикладу системи задач, в яких ефективно застосовуються міркування з генезисом у «базовому» курсі математичного аналізу для студентів. Використовується потужний і принциповий для педагогічної діяльності в галузі математики «контрастний» дидактичний метод, який полягає, зокрема, в тому, що для деяких складних олімпіадних задач наводяться і розв'язання, передбачені їхніми авторами, і пропонуються альтернативні — у контексті тематики статті.*

***Результати**. Розроблено ідею використання елементарної характеризації точок розриву кусково-сталих функцій, що природно виникають у зв'язку з розглядом виразів з цілою частиною, та необхідні для реалізації такої ідеї методичне середовище та супровід.*

***Висновки**. Матеріали статті набувають особливих рис з точки зору обов'язкової підготовки на математичних спеціальностях педагогічних університетів до майбутньої роботи з обдарованими учнями в процесі опанування розділів вищої математичної освіти, неперервної самоосвіти вчителів, скеровують на подальшу пошукову діяльність школярів, вчителів, викладачів та студентів закладів вищої освіти, авторів задач математичних олімпіад тощо.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: методика навчання математики, олімпіадні задачі з математики, ціла частина числа, точки розриву функцій, кусково-сталі функції, післядипломна педагогічна освіта, загальна середня освіта.

ВСТУП

Постановка проблеми. Важливою складовою підвищення фахової компетентності вчителів математики, підготовки студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів, навчання учнів на рівні поглибленого (профільного) вивчення математики (у тому числі й підготовка обдарованих учнів до математичних олімпіад різного рівня) є невпинний пошук нових форм подання й аналізу задачного матеріалу, який є найвпливовішим вимірником якості математичної освіти на всіх її етапах. При цьому, як відомо, неможливо обмежуватись задачним матеріалом суто «відтворювального» характеру, тобто задачний матеріал на цих щаблях не можна відокремлювати від теоретичного опрацювання апарату математичної науки, формування відповідного наукового світогляду та стилю мислення, стійкого усвідомленого інтересу здібних учнів до математики, розвитку дослідницьких навичок, творчих здібностей і схильності до креативної розумової діяльності в умовах навчального середовища, орієнтованого на вибір у майбутньому професії, пов'язаної з математикою. Одним зі способів мотивації, які доцільно використовувати задля досягнення такої мети, є створення проблемної ситуації, у тому числі й досить складної, — такої, що вимагає серйозних математичних знань та значних зусиль для її вирішення, і під час опрацювання проблеми учні стикаються з недостатністю наявних математичних знань та необхідністю оволодіння новою предметною інформацією (Навчальні програми з математики, затверджені наказами МОН України від 14.07.2016 №826, від 07.06.2017 №804, від 23.10.2017 №1407). Однією з провідних змістових ліній є функціональна, тому в процесі навчання математики приділяється особлива увага дослідженням властивостей функцій у тій чи іншій формі, розв'язуванню рівнянь та нерівностей як окремим випадкам задач на дослідження функцій, встановленню характеру неперервності, точок розриву та ін. (Навчальні програми з математики, затверджені наказами МОН України від 14.07.2016 №826, від 07.06.2017 №804, від 23.10.2017 №1407).

Відтак, у межах відповідної дидактичної парадигми завжди виникає складна проблема створення для ключових тематичних розділів задачних комплексів (систем задач), які дозволяють послідовно реалізовувати на рівні поглибленого навчання школярів, підготовки студентів математичних спеціальностей, підвищення кваліфікації вчителів ефективний нерозривний зв'язок між теоретичним та практичним (задачним) матеріалом. Один з можливих підходів щодо вирішення такої проблеми на прикладі популярної тематичної лінії, пов'язаної із цілою (дробовою) частиною числа, з упевненим володінням базовими поняттями математичного аналізу, з концентрацією аналітичних навичок студентів, педагогічних працівників, розгортається у статті в розвитку задачного матеріалу математичних олімпіад.

Аналіз актуальних досліджень. Значний методичний потенціал теоретичного й задачного матеріалу, пов'язаного з функціями цілої та дробової частини числа, досить давно привертає стійку увагу відомих учених-методистів та педагогів-практиків, авторів задач математичних змагань різного рівня. У роботах (Гурский, 1968; Апостолова та ін., 1996; Апостолова&Ясінський, 2006; Шунда, 2001) докладно розроблено методи побудови графіків функцій, аналітичні вирази яких містять цілу й дробову частину числа. Книжки (Апостолова та ін., 1996; Апостолова&Ясінський, 2006; Шунда, 2001), а також статті (Grati&Costaş, 1995a, 1995b) містять чимало ґрунтовних матеріалів, присвячених класичним прийомам розв'язування рівнянь та нерівностей з цілою та дробовою частиною (застосовується певний арсенал графічних прийомів, прийомів переходу до систем та сукупностей рівнянь та/або нерівностей, метод необхідних умов та ін.). Деякі нестандартні комбінаторні, теоретико-числові аспекти цієї тематики розглядаються автором даної статті в роботі (Мітельман, 2000). Матеріали сучасних олімпіад активно, як було вказано вище, презентують задачі з цілою (дробовою) частиною числа (Лейфура та ін., 2003, 2008; Мітельман, 2010; Сайт математичних олімпіад в Україні). Звернемо увагу на посібник (Лейфура та ін., 1999), інші роботи цих авторів, в яких на систематичному рівні було реалізовано принципову стратегію конвертації ідей деяких розділів курсів вищої математичної освіти для застосування під час підготовки обдарованих учнів до математичних олімпіад вищого рівня не тільки в теоретичному розрізі, але й для успішного розв'язування конкретних ідей. Автор статті на прикладах деяких типів олімпіадних задач комбінаторно-логічного характеру в роботі (Мітельман, 2012) розгорнув обговорення проблем формування продуктивних згорнутих дидактичних структур, завдяки яким значною мірою відбувається навчання розв'язування складних задач (Крутецкий, 1968, с. 336–337; Столяр, 1986, с. 112, 115, 158, 187–196; Шеварёв, 1946, 1959). З цієї точки зору зміст запропонованої тут статті можна вважати продовженням розробки впровадження даного кола методичних та практичних прийомів уже на іншому математичному матеріалі.

Мета статті. Світова практика підготовки учнів до математичних змагань різного рівня — від перших етапів олімпіад до Міжнародних математичних олімпіад — доводить, що основним оперативним інструментом навчання евристичних схем доведення в олімпіадних задачах, пошуку *напрямних моделей* шляхом застосування продуктивних узагальнених згорнутих асоціацій та згорнутих структур є формування в свідомості обдарованих учнів таких асоціацій та структур у вигляді систем (масивів) базових задач. Кожна задача сформованого масиву базових задач для обраного розділу олімпіадних задач має ретельно й докладно розглядатись з точки зору усвідомленого вибору об'єктів моделювання (визначення того, яка властивість конструкції «відповідає» за твердження задачі), зручної «мови» описання моделі, а потім — з точки зору відповідної евристичної схеми доведення (Слєпкань, 2000, с. 70–82) (або ж — якщо це необхідно — з точки зору інтегрованого застосування декількох схем). Усебічне обговорення цих складових розв'язання задачі, порівняння з іншими задачами на дану тему, спроби узагальнити задачу та/або створити подібну (щоб скласти уявлення про межі застосування того способу міркувань, за допомогою котрого щойно розв'язали задачу) — усе це є невід'ємними складовими методичної техніки створення продуктивних згорнутих асоціацій та згорнутих структур мислення, майбутньої активізації та актуалізації набутих учнями компетенцій у вигляді закріпленого освітнього результату — успішного виступу на математичних змаганнях різних типів.

Задачі (у першу чергу — рівняння та нерівності) з цілою частиною числа дуже часто виявляються пов'язаними з поведінкою кусково-сталих функцій, які, у свою чергу, є одним з найбільш простих та зрозумілих для початкового ознайомлення типів розривних функцій. Ці задачі акумулюють як важливі для математичної освіти навички з основ математичного аналізу, алгебри, так і суто олімпіадні компоненти, притаманні роботі з математично обдарованою молоддю. Для вирішення поставленої вище проблеми **стаття ставить за мету** створення на концептуальній основі названих досліджень конкретного обґрунтованого прикладу евристично орієнтованої системи навчальних задач і вправ, якими наскрізно поєднується теоретична підготовка з математичного аналізу вчителів, школярів, студентів з практикою розв'язування актуального класу олімпіадних задач, пов'язаних із цілою частиною числа, точками розриву відповідних функцій, пошуком дидактичних механізмів навчання цього учнів та студентів.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Дослідження базується на методах системного науково-методологічного аналізу наукової, навчально-методичної та психолого-педагогічної літератури, задачних матеріалів математичних змагань для обдарованих учнів, синтезі та узагальненні теоретичних положень та практичних висновків і рекомендацій, які містяться в навчально-методичних та наукових джерелах, спостереженні та аналізі навчального процесу з підготовки учнів та студентів, роботи з учителями математики в системі післядипломної педагогічної освіти, узагальненні власного педагогічного досвіду, досвіду інших фахівців з питань науково-методичного забезпечення математичних олімпіад. Деякі математичні положення статті потребують застосування методів такого розділу математики, як математичний аналіз. Матеріали статті апробовані автором під час підготовки учнів до математичних змагань, на лекціях та практичних заняттях з підвищення кваліфікації вчителів, а також — у процесі складання окремих задач та комплектів завдань для математичних олімпіад.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Стрибок функції f у точці x_0 розриву І роду (внутрішній точці області визначення функції f) визначається так: $J_{x_0}(f)=\left|R_{x_0}(f)-L_{x_0}(f)\right|$, де через $R_{x_0}(f)$ і $L_{x_0}(f)$ позначаються скінченні границі функції f у точці x_0 — правостороння та лівостороння відповідно. Для будь-якої неспадної чи незростаючої на проміжку $(\alpha;\beta)$, $-\infty\le\alpha<\beta\le+\infty$, функції f в кожній точці $x_0\in(\alpha;\beta)$ такі скінченні границі існують [6]. Відтак, монотонна (неспадна чи незростаюча) на проміжку $(\alpha;\beta)$, $-\infty\le\alpha<\beta\le+\infty$, функція може мати точки розриву тільки І роду. Для **неспадної** функції $J_{x_0}(f)=R_{x_0}(f)-L_{x_0}(f)$. Інколи зручно ідентифікувати внутрішню точку x_0 області визначення функції f як точку неперервності умовою $J_{x_0}(f)=0$. Неважко отримати, що для суми декількох **неспадних** функцій f_1, f_2, … , f_m, кожна з яких у точці x_0 має скінченні правосторонню та лівосторонню границю, виконується рівність $J_{x_0}(f_1+\ldots+f_m)=J_{x_0}(f_1)+\ldots+J_{x_0}(f_m)$. Звідси, зокрема, випливає, що множина точок розриву функції $f_1+\ldots+f_m$ є об'єднанням множин точок розриву неспадних функцій f_1, f_2, … , f_m: оскільки $J_{x_0}(f_1)\ge0$, … , $J_{x_0}(f_m)\ge0$, то $J_{x_0}(f_1+\ldots+f_m)>0$ тоді й тільки тоді, коли існує хоча б одне таке i, $1\le i\le m$, для якого $J_{x_0}(f_i)>0$. Відтак, запропонований метод зводиться до знаходження всіх точок розриву, обчислення та/або порівняння визначальних значень кусково-сталих функцій у точках розриву й відповідних стрибків цих функцій. У багатьох з таких задач слід визначити таку з точок розриву, в якій досягається потрібна рівність, після чого скористатись характером монотонності розглядуваних функцій. На такій математичній ідеї, яка може бути розглянута на мотиваційному етапі (задачі 1–3) формування евристичних умінь з нашої тематики в класах з поглибленим вивченням математики, на практичних заняттях зі студентами математичних спеціальностей, з учителями математики, будується наступна «компактна» навчальна система задач різнорівневої складності, якою динамічно охоплюється досить широкий спектр завдань математичних олімпіад (див. також (Мітельман, 2019)).

Задача 1. Побудуйте графік функції $f(x)=[x]+[2x]$, $x\in\mathbf{R}$.

Розв'язання. Цей графік можна побудувати в добре відомий учителям, студентам та учням, які вивчають математику поглиблено, стандартний спосіб — «додаванням» графіків функцій $g(x)=[x]$, $h(x)=[2x]$.

Продемонструємо альтернативний підхід, ураховуючи, що функція f є **кусково-сталою** й **неспадною**. Множина всіх її точок розриву має вигляд $\left\{\frac{1}{2}k:\ k\in\mathbf{Z}\right\}$, і всі вони є точками розриву І роду, **причому в кожній з них** (*як і в решті розглядуваних тут задач*) **ми маємо неперервність справа**.

Нехай $x_0=n$ — ціле число. Тоді $J_{x_0}(f)=J_{x_0}(g+h)=J_{x_0}(g)+J_{x_0}(h)=1+1=2$. Якщо ж $x_0=\dfrac{2l+1}{2}$, $l\in\mathbf{Z}$, то $J_{x_0}(f)=J_{x_0}(g+h)=J_{x_0}(g)+J_{x_0}(h)=0+1=1$. Ураховуючи, що $f(0)=0$, легко побудувати графік функції f (рис. 1).

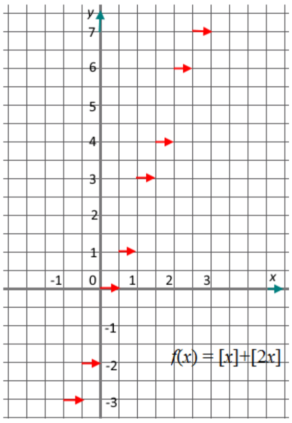

Рис. 1

Задача 2. Розв'яжіть рівняння: *а*) $[x]+[2x]=5$; *б*) $[x]+[2x]=6$.

Розв'язання. Аналогічні рівняння традиційно розв'язуються із застосуванням прийомів «оцінювання» (Апостолова та ін., 1996; Апостолова&Ясінський, 2006; Шунда, 2001; Grati&Costaş, 1995a). Ці рівняння неважко (і доцільно з методичної точки зору) розв'язати, використовуючи графік функції $f(x)=[x]+[2x]$. Але ж у пункті *а*) відповідь знаходиться — з урахуванням неспадання функції f — з того, що для всіх $x\in\left[\frac{3}{2};2\right)$ $f(x)=f\left(\frac{3}{2}\right)=4<5$, а $f(2)=6>5$. Відповідь у пункті *б*) відразу випливає з того, що найближчою з правого боку до точки розриву $x=2$ є точка розриву $x=2\frac{1}{2}$. ***Відповідь***: *а*) $\varnothing$; *б*) $x\in\left[2;2\frac{1}{2}\right)$.

Задача 3. Розв'яжіть рівняння $[x]+[2x]+[3x]=3$.

Розв'язання. Множиною точок розриву кусково-сталої неспадної функції $f(x)=[x]+[2x]+[3x]$ є об'єднання множин $\left\{\frac{1}{2}k:\ k\in\mathbf{Z}\right\}$, $\left\{\frac{1}{3}(3m\pm1):\ m\in\mathbf{Z}\right\}$. Знаходимо точку розриву $x=\frac{2}{3}$, в якій досягається рівність, і найближчу до неї з правого боку точку розриву $x=1$. ***Відповідь***: $x\in\left[\frac{2}{3};1\right)$.

Зауважимо, що і для цієї задачі слід розглянути розв'язання, яке ґрунтується на побудові графіка функції f.

Задача 4. Доведіть, що для всіх $x\in\mathbf{R}$ $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$.

Розв'язання. Множина $\left\{\frac{1}{2}k:\ k\in\mathbf{Z}\right\}$ є множиною точок розриву і функції $f(x)=[2x]$, і функції $g(x)=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]$. Обидві ці функції неспадні та кусково-сталі, причому всі точки розриву відносяться до I роду, у кожній з них маємо неперервність справа. Якщо $x=m$, $m\in\mathbf{Z}$, то $f(x)=2m$ і $g(x)=m+\left[m+\frac{1}{2}\right]=2m+\left[\frac{1}{2}\right]=2m$. Для напівцілого $x=m+\frac{1}{2}$, $m\in\mathbf{Z}$, $f(x)=2m+1$, $g(x)=\left[m+\frac{1}{2}\right]+[m+1]=2m+1$.

Задача 5. *а*) Доведіть, що для всіх $x\in\mathbf{R}$ $[x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=[3x]$ (розв'язується аналогічно до задачі 4). *б*) Знайдіть усі такі $p\in\mathbf{R}$, для яких рівність $[x]+[x+p]+[x+2p]=[3x]$ виконується для будь-якого $x\in\mathbf{R}$ (Фестиваль юних математиків та фізиків Рішельєвського ліцею, м. Одеса, 1997 р.).

Розв'язання. Із пункту *а*) випливає, що $p=\frac{1}{3}$ задовольняє умову задачі. Неважко встановити, що жодне ціле p потрібної властивості не має. Далі, для будь-якого $p\notin\mathbf{Z}$, як відомо, $[-p]+[p]=-1$, і тому $[-3p]=-1$, тобто $0<p\le\frac{1}{3}$. Утім, якщо $p\in\left(0;\frac{1}{3}\right)$, то для $x=\frac{1}{3}$ рівність з умови задачі не справджується. ***Відповідь***: $p=\frac{1}{3}$.

Задача 6. Нехай $n\in\mathbf{N}$, $n\ge 2$. Розв'яжіть рівняння $[x]+[2x]+\ldots+[nx]=1$.

Розв'язання. Для функції $f(x)=[x]+[2x]+\ldots+[nx]$ точками розриву є всі точки вигляду $x=\frac{m}{k}$, $m\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{N}$, $1\le k\le n$ (і тільки вони). Помітимо, що $f\left(\frac{1}{n}\right)=1$. Найближчою справа до точки розриву $x=\frac{1}{n}$ є саме точка розриву $x=\frac{1}{n-1}$. Насправді, для $m=1$ і $k<n$ виконується нерівність $\frac{1}{k}\ge\frac{1}{n-1}$, а для $m\ge 2$ маємо: $(m-1)(n-1)\ge 1$, $mn-m\ge k$, $\frac{m}{k}\ge\frac{1}{n-1}$. ***Відповідь***: $x\in\left[\frac{1}{n};\frac{1}{n-1}\right)$.

Задача 7 (Соросівська олімпіада, 1995 р., Україна). Розв'яжіть рівняння $[x]+[2x]+\ldots+[1995x]=1995$.

Розв'язання (див. дещо інші міркування в (Лейфура та ін., 2003, с. 319)). Точками розриву функції $f(x)=[x]+[2x]+\ldots+[1995x]$ є всі точки вигляду $x=\frac{m}{k}$, $m\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{N}$, $1\le k\le 1995$ (і тільки вони). Знайдемо, що $f\left(\frac{2}{1331}\right)=1995$. Неважко довести, що найближчою справа до точки розриву $x=\frac{2}{1331}$ є точка розриву $x=\frac{1}{665}$ (Мітельман, 2019). ***Відповідь***: $x\in\left[\frac{2}{1331};\frac{1}{665}\right)$.

Задача 8 (Соросівська олімпіада, 1995 р., Україна). Розв'яжіть рівняння $[x]+\left[\frac{3}{2}x\right]+[2x]=1995$.

Указівка (див. інші міркування в (Лейфура та ін., 2003, с. 316)). Знаходимо точку розриву $x=443\frac{1}{2}$ функції $f(x)=[x]+\left[\frac{3}{2}x\right]+[2x]$, в якій досягається рівність, і найближчу до неї з правого боку точку розриву $x=444$. ***Відповідь***: $x\in\left[443\frac{1}{2};444\right)$.

Задача 9 (Соросівська олімпіада, 1998 р., Україна). Розв'яжіть рівняння $[19x]+98[x]=1998$.

Указівка (див. інший спосіб розв'язування цієї задачі в (Лейфура та ін., 2003, с. 384)). Знаходимо точку розриву $x=17\frac{9}{19}$ функції $f(x)=[19x]+98[x]$, в якій досягається рівність, і найближчу до неї з правого боку точку розриву $x=17\frac{10}{19}$. ***Відповідь***: $x\in\left[17\frac{9}{19};17\frac{10}{19}\right)$.

Задача 10 (Канадська олімпіада, 1981 р.). Розв'яжіть рівняння $[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$.

Розв'язання (у книжці (Конягин и др., 1987, с. 163) подається інший — значно більш «штучний» та складний — спосіб розв'язування). Точками розриву відповідної кусково-сталої неспадної функції будуть усі точки вигляду $x=\frac{m}{32}$, $m\in\mathbf{Z}$ (і тільки вони). Візьмемо дві сусідні точки розриву $x_1=195\frac{31}{32}$ та $x_2=196$. Відсутність коренів у даного рівняння випливає з того, що $f(x_1)=12342<12345<f(x_2)=12348$. ***Відповідь***: $\varnothing$.

ОБГОВОРЕННЯ

Запропонована система задач має важливі для формування згорнутих асоціацій ознаки *гнучкості*, *різнорівневої диференціації*, *алгоритмічності* та *структурної впізнаваності*, реалізує етапи «занурення» й «тренінгу» (які передбачають актуалізацію евристичних ситуацій, формулювання евристичного прийому, оволодіння його змістом, відпрацювання операційних навичок, розв'язування відповідних задач з використанням рекомендованих підходів, евристичних підказок), надає матеріали для контрольно-оцінювального етапу формування евристичних умінь (зокрема, дозволяє пропонувати аналогічні задачі під час математичних олімпіад різного рівня, **самостійно складати нові задачі такого ж типу** тощо). Звертаємо особливу увагу на те, що для деяких задач надаються посилання для ознайомлення з суттєво іншими технічними підходами до розв'язування, оскільки *компаративний* аналіз способів розв'язування задач олімпіадного характеру має особливий дидактичний потенціал для розвитку математичних компетентностей усіх учасників навчального процесу, помітно підсилює зазначені вище етапи навчання та закріплення евристичних прийомів у математиці.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

В умовах постійного оновлення змісту сучасних математичних змагань розвиток ідей формування продуктивних згорнутих дидактичних структур для навчання розв'язування олімпіадних задач різного рівня складності вимагає постійного вдосконалення науково-методичної діяльності щодо створення та дидактичного супроводу спеціальних ефективних «ланцюжків» тренувальних задач і вправ, якими реалізується системне сприйняття математичного змісту задач (у тому числі й логіки авторів нових задач) у конгломераті математичної освіти «студент — учитель — учень». Стаття дає приклад такої системи задач (з урахуванням фактора мінімізації витрат навчального часу без втрати методичної та наукової якості) у поєднанні з теоретичним матеріалом, яка може не тільки безпосередньо використовуватись у педагогічній практиці, але параметрів котрої можуть дотримуватись і вчителі для пошуку та опрацювання інших питань, і вчені-методисти, і викладачі закладів вищої освіти (зокрема, для формування тематики курсових та дипломних робіт для майбутніх учителів). Для обдарованих учнів вивчення зв'язків методів розв'язування олімпіадних задач з більш широким колом математичних питань, виявлення (самостійно або під керівництвом учителя) спеціалізації й трансформації фактів «нешкільної» математики в задачному матеріалі сприяє формуванню стійкого мотивованого пізнавального інтересу і є не тільки живильним середовищем для підготовки до олімпіад, але й перспективним напрямом дослідницької роботи в Малій академії наук.

Список використаних джерел

1. Апостолова Г., Панкратова І., Фінкельштейн Л. *Ціла та дробова частина числа*. Київ: Факт, 1996. 97 с.
2. Апостолова Г.В., Ясінський В.В. *Антьє і мантиса числа*. Київ: Факт, 2006. 128 с.
3. Гурский И.П. *Функции и построение графиков*. Москва: Просвещение, 1968. 215 с.
4. *Зарубежные математические олимпиады*/ Конягин С.В. и др.; Москва: Наука, 1987. 416 с.
5. Кукуш А.Г. *Монотонные последовательности и функции*. Київ: Вища школа, 1989. 104 с.
6. Крутецкий В. А. *Психология математических способностей школьников*. Москва: Просвещение, 1968. 432 с.
7. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. *Математичні олімпіади школярів України: 1991–2000*. Київ: Техніка, 2003. 541 с.
8. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. *Математичні олімпіади школярів України: 2001–2006*. Львів: Каменяр, 2008. 348 с.
9. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. *Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язування*. Львів: Євросвіт, 1999. 128 с.
10. Мітельман І. М. *Вибрані задачі відкритих математичних олімпіад та фестивалів Рішельєвського ліцею*. Одеса: ТЕС, 2010. 245 с.
11. Мітельман І.М. Методичні та практичні аспекти розв'язування деяких олімпіадних задач про цілу частину числа. *Наша школа*. 2000. №№2–3. С. 150–155.
12. Мітельман І.М. Проблеми формування продуктивних згорнутих дидактичних структур та розв'язування олімпіадних задач про покриття клітчастих областей конгруентними поліміно. *Наша школа*. 2012. №6. С. 61–72.
13. Мітельман І.М. Точки розриву кусково-сталих функцій та деякі прийоми розв'язування олімпіадних задач, пов'язаних із цілою частиною числа. Наукові тези IV Всеукраїнської науково-практичної конференції «Розвиток сучасної природничо-математичної освіти: реалії, проблеми якості, інновації» (Запоріжжя, 1–5 квітня 2019 р.). *Електронний збірник наукових праць Запорізького обласного інституту післядипломної педагогічної освіти*, 2019. Випуск 1(33). URL: http://www.zoippo.zp.ua/pages/el_gurnal/pages/vip33.html (дата звернення 29.05.2019).
14. Навчальні програми з математики для закладів загальної середньої освіти. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi (дата звернення 22.04.2019).
15. Сайт математичних олімпіад в Україні. URL: https://matholymp.com.ua (дата звернення 22.04.2019).
16. Слєпкань З. І. *Методика навчання математики*. Київ: Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.
17. Столяр А. А. *Педагогика математики*. Минск: Вышэйш. шк., 1986. 414 с.

18. Шеварёв П. А. Процессы мышления в учебной работе школьника. *Советская педагогика*. 1946. №3. С. 94–109.
19. Шеварёв П. А. *Обобщённые ассоциации в учебной работе школьников*. Москва: Изд-во АПН РСФСР, 1959. 302 с.
20. Шунда Н.М. *Розв'язування рівнянь, пов'язаних з функціями: ціла і дробова частини дійсного числа*. Київ: Техніка, 2001. 124 с.
21. Grati, I., & Costaş, A. (1995a). Ecuaţii ce conţin partea întreagă a unui număr real. *Foaie matematică*, 1, 15–23.
22. Grati, I., & Costaş, A. (1995b). Resolvarea inecuaţiilor ce conţin partea întreagă a unui număr real. *Foaie matematică*, 6, 9–16.

References

1. Apostolova, H., Pankratova, I. & Finkelshtein L. (1996). *Tsila ta drobova chastyna chysla [Integer and fractional part of number]*. Kyiv: Fakt [in Ukrainian].
2. Apostolova, H.V. & Yasinskyi, V.V. (2006). *Antie i mantysa chysla [Entier and mantissa of number]*. Kyiv: Fakt [in Ukrainian].
3. Gurskij, I.P. (1968). *Funkcii i postroenie grafikov [Functions and graphing]*. Moskva: Prosveshhenie [in Russian].
4. Konjagin, S.V. et al (1987). *Zarubezhnye matematicheskie olimpiady [Foreign Mathematical Olympiads]*. Moskva: Nauka [in Russian].
5. Kukush, A.G. (1989). *Monotonnye posledovatel'nosti i funkcii [Monotonic sequences and functions]*. Kyiv: Vishha shkola [in Russian].
6. Kruteckij, V. A. (1968). *Psihologija matematicheskih sposobnostej shkol'nikov [Psychology of mathematical abilities of schoolchildren]*. Moskva: Prosveshhenie [in Russian].
7. Leifura, V.M., Mitelman, I.M., Radchenko, V.M. & Yasinskyi, V.A. (2003). *Matematychni olimpiady shkoliariv Ukrainy: 1991–2000 [Mathematical Olympiads of Ukrainian Schoolchildren: 1991–2000]*. Kyiv: Tekhnika [in Ukrainian].
8. Leifura, V.M., Mitelman, I.M., Radchenko, V.M. & Yasinskyi, V.A. (2008). *Matematychni olimpiady shkoliariv Ukrainy: 1991–2000 [Mathematical Olympiads of Ukrainian Schoolchildren: 2001–2006]*. Lviv: Kameniar [in Ukrainian]
9. Leifura, V.M., Mitelman, I.M., Radchenko, V.M. & Yasinskyi, V.A. (1999). *Zadachi mizhnarodnykh matematychnykh olimpiad ta metody yikh rozviazuvannia [The problems of International Mathematical Olympiads and methods of their solving]*. Lviv: Yevrosvit [in Ukrainian].
10. Mitelman, I. M. (2010). *Vybrani zadachi vidkrytykh matematychnykh olimpiad ta festyvaliv Rishelievskoho litseiu [Selected problems of Open Mathematical Olympiads and Festivals of the Richelieu Lyceum]*. Odesa: TES [in Ukrainian].
11. Mitelman, I.M. (2000). Metodychni ta praktychni aspekty rozviazuvannia deiakykh olimpiadnykh zadach pro tsilu chastynu chysla [Methodological and practical aspects of solving of some olympiad-type problems on the integer part of a number]. *Nasha shkola — Our School*, 2–3, 150–155 [in Ukrainian].
12. Mitelman, I.M. (2012). Problemy formuvannia produktyvnykh zghornutykh dydaktychnykh struktur ta rozviazuvannia olimpiadnykh zadach pro pokryttia klitchastykh oblastei konhruentnymy polimino [The questions of the formation of productive convolute didactic structures and the solving of olympiad-type problems on the covering of cellular regions by congruent polyominoes]. *Nasha shkola — Our School*, 6, 61–72 [in Ukrainian].
13. Mitelman, I.M. (2019). Tochky rozryvu kuskovo-stalykh funktsii ta deiaki pryiomy rozviazuvannia olimpiadnykh zadach, poviazanykh iz tsiloiu chastynoiu chysla [Discontinuity points of step functions and some methods of solving olympiad-type problems related to integer part of number]. Proceedings from *«IV Vseukrainska naukovo-praktychna konferentsiia «Rozvytok suchasnoi pryrodnycho-matematychnoi osvity: realii, problemy yakosti, innovatsii» — The Fourth All-Ukrainian Scientific and Practical Conference «Development of modern natural sciences and mathematical education: realities, problems, quality, innovation»* (Zaporizhzhia, 1–5 kvitnia 2019 r.). *Elektronnyi zbirnyk naukovykh prats Zaporizkoho oblasnoho instytutu pisliadyplomnoi pedahohichnoi osvity — Electronic Proceedings of Zaporizhzhya Regional Institute of Postgraduate Pedagogical Education*, 1(33). Retrieved from: http://www.zoippo.zp.ua/pages/el_gurnal/pages/vip33.html [in Ukrainian].
14. Navchalni prohramy z matematyky dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity [The curriculum for general education schools in mathematics]. Retrieved from: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi [in Ukrainian].
15. Sait matematychnykh olimpiad v Ukraini [Site of Mathematical Olympiads in Ukraine]. Retrieved from: https://matholymp.com.ua.
16. Sliepkan, Z. I. (2000). *Metodyka navchannia matematyky [Mathematics teaching methodology]*. Kyiv: Zodiak-EKO [in Ukrainian].
17. Stoljar, A. A. (1986). *Pedagogika matematiki [Pedagogy of mathematics]*. Minsk: Vyshjejsh. shk. [in Russian].
18. Shevarjov, P. A. (1946). Processy myshlenija v uchebnoj rabote shkol'nika [Thinking processes in schoolchildren educational work]. *Sovetskaja pedagogika — Soviet Pedagogy*, 3, 94–109 [in Russian].
19. Shevarjov, P. A. (1959). *Obobshhjonnye associacii v uchebnoj rabote shkol'nikov [Generalized associations in schoolchildren educational work]*. Moskva: Izdatel'stvo APN RSFSR [in Russian].
20. Shunda, N.M. (2001). *Rozviazuvannia rivnian, poviazanykh z funktsiiamy: tsila i drobova chastyny diisnoho chysla [Solving of the equations related to the functions of the integer and fractional part of a real number]*. Kyiv: Tekhnika [in Ukrainian].
21. Grati, I. & Costaş, A. (1995a). Ecuaţii ce conţin partea întreagă a unui număr real [Equations with the integer part of a real number]. *Foaie matematică — Mathematical Sheet*, 1, 15–23 [in Romanian].
2. Grati, I. & Costaş, A. (1995b). Resolvarea inecuaţiilor ce conţin partea întreagă a unui număr real [Solving of inequalities with the integer part of a real number]. *Foaie matematică — Mathematical Sheet*, 6, 9–16 [in Romanian].

ON TEACHING SOLVING OLYMPIAD-TYPE PROBLEMS RELATED TO INTEGER PART OF REAL NUMBER USING THE PROPERTIES OF DISCONTINUITY POINTS OF STEP FUNCTIONS

Mitelman I.M.

Odessa Regional Academy of In-Service Education, Odessa, Ukraine

***Abstract**. The practice of teaching mathematics and its scientific and methodological support convincingly evidences that the problems on the integer (fractional) part of a real number traditionally accumulate a considerable layer of students' skills, require a high analytical culture, technical ingenuity. Such topics are an actual component of the implementation of the most important functional line for a pupil and a student training, teacher training in the use of various properties of functions, requires skills of algebraic, combinatorial, number-theoretic considerations.*

***Formulation of the problem**. There is a problem of searching and/or modernizing the apparatus of effective methodological and mathematical methods for solving relevant problems of higher complexity level, related to the integer and fractional part of a real number, among which the problems of mathematical olympiads are always highlighted as an indicator of the quality of the formed professional competence.*

***Materials and methods**. The article deals with theoretical and practical point of view of solving some types of problems related to the integer part of the number by creating an example of a system of problems in which arguments are effectively applied with genesis in the «basic» course of mathematical analysis for students. A powerful and principled «contrast» didactic method for pedagogical activity in the field of mathematics is used: that is, in particular, for some complex olympiad-type problems the solutions provided by their authors are presented and alternatives are proposed in the context of the subject matter of the article.*

***Results**. The idea of using the elementary characterization of the discontinuity points of step functions, which naturally arise in connection with the consideration of expressions with the integer part, and the methodical environment and maintenance necessary for the implementation of such idea has been developed.*

***Conclusions**. Materials of the article acquire special lineaments from the point of view of compulsory preparation in mathematical specialties of pedagogical universities for the future work with gifted schoolchildren in the process of mastering sections of higher mathematical education, in-service self-education of teachers, directing for further search activity of secondary school students and teachers, teachers and students of institutions of higher education, authors of the problems of mathematical olympiads, etc.*

***Keywords**: mathematics teaching methodology, olympiad-type problems in mathematics, integer part of number, discontinuity points of functions, step functions, postgraduate pedagogical education, general secondary education.*