Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Шевченко І. С. Приклади візуалізації у навчанні математики // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – Суми : СумДПУ ім. А.С.Макаренка, 2014. – № 2 (3). – С. 65-78.

УДК 378.14

Інна Шевченко
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна

ПРИКЛАДИ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ

Сучасний етап розвитку людства характеризується глобальним зростанням обсягів різноманітної інформації, а практика сучасної школи свідчить про існування об'єктивної суперечності між обсягом знань, яким повинен оволодіти суб'єкт навчання, та традиційними способами засвоєння цих знань. До новацій у розв'язанні означеної суперечності наразі відносять технології візуалізації.

Зазначимо, що серед російських педагогів проблемами візуалізації навчання займався В.Ф. Шаталов. Його досвід використання у навчальному процесі опорних сигналів у свій час активно впроваджувався у шкільну практику. Новаторство цього досвіду полягає у створенні і використанні наочних схем, що охоплюють декілька параграфів матеріалу, який вивчається. Однак, зазначимо, що основою його методики є асоціативна модель запам'ятовування інформації. Ті асоціації, які використовував В.Ф. Шаталов для створення своїх опорних сигналів, є результатом його професійного досвіду, креативності та непересічних рис особистості. Тому, на жаль, цей досвід не здобув широкого впровадження в шкільну практику.

Процес візуалізації активно вивчається у сучасних дослідженнях науковців, серед яких Далінгер В.О., Резник Н.О., Арнхейм Р., Ерднієв Б.П., Бровка Н.В., Вербицький А.А., Селевко Г.К., Плотинський Ю.М. та інші.

Але, як показує аналіз навчальної літератури з математики, ця проблема ще не достатньо вивчена. Як наслідок, вчителі математики мало використовують ці методи в процесі навчання.

На нашу думку, саме технологія візуалізації навчальної інформації може стати основою нових методик навчання математики як у загальноосвітніх школах, так і у вищих навчальних закладах, оскільки мова математики – це, насамперед, мова математичних моделей, символів, образів, які беззаперечно є частиною процесу візуалізації математичного знання.

Нижче наведемо приклади когнітивної візуалізації, розроблені науковцями та авторські варіанти когнітивної візуалізації.

1. Статичні схеми

Приклад. Довести нерівність $\frac{b-a}{b} < \int_a^b \frac{dx}{x} < \frac{b-a}{a}$ [1].

Нерівність стає очевидною, коли на рис. 1 оцінити площу криволінійної трапеції – вона обмежена знизу площею меншого прямокутника $(b-a)\frac{1}{b}$ і зверху площею більшого прямокутника $(b-a)\frac{1}{a}$.

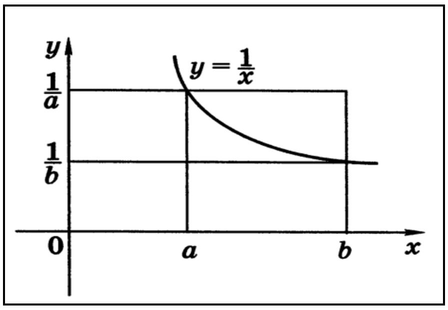


Рис. 1

Приклад 2. Довести, що $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ [1].

Рівність стає очевидною, коли звернутися до геометричного тлумачення квадрата числа – відрізки *a*, *b*, *c* розбивають квадрат на частини, сумарна площа яких стоїть праворуч у рівності і складає площу великого квадрата. Зауважимо, що рівність справедлива і для від'ємних *a*, *b*, *c,* але при цьому не є очевидною і вимагає іншого доведення.

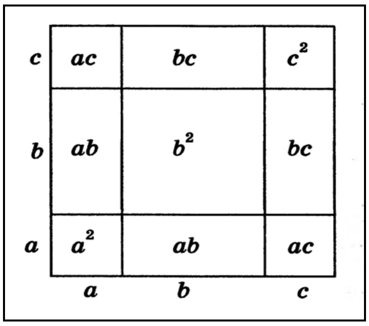


Рис. 2

Приклад 3. Довести нерівність $x+\frac{1}{x} \geq 2 \ (x \geq 1)$ [1].

Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату і звернемося до геометричної інтерпретації (рис. 3).

$$(x+\frac{1}{x})^2 \geq 4, \qquad x+\frac{1}{x} \geq 2$$

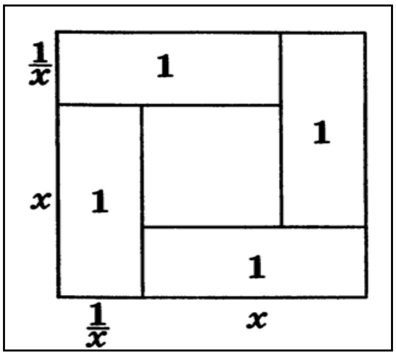


Рис. 3

Приклад. Довести формулу $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$ [1].

На рис. 4 унаочнена ідея доведення, яку нижче зафіксовано аналітичними викладками.

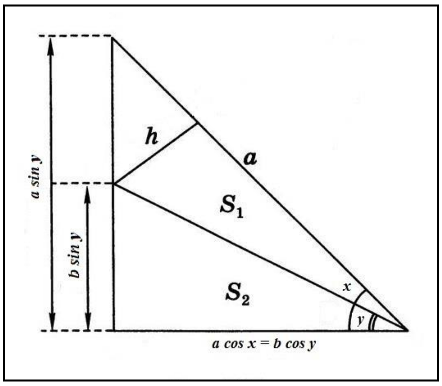


Рис. 4

$$s = s_1 + s_2,\ s_1 = s - s_2, h = b \cdot \sin(x-y)$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sin x \cdot\ b \cdot \cos y, s_2 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sin y \cdot a \cdot \cos x$$

$$S - S_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot (\sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x)$$

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(x-y)$$

$$s_1 = s - s_2 =>$$

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot (\sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(x-y) =>$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

Приклад. Навчальне теоретичне дослідження зі сторінок навчального посібника «Візуальна алгебра. Многочлени» (рис. 5) [2].

Приклад. На базі лабораторії використання інформаційних технологій в освіті (фізико-математичний факультет Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка) (науковий керівник – Семеніхіна О.В.) розроблялися візуальні дидактичні матеріали з курсу аналітичної геометрії, які частково вивчаються у шкільному курсі математики: пряма у просторі, площина у просторі (рис. 6-7) (геометрія 10 клас) [3].

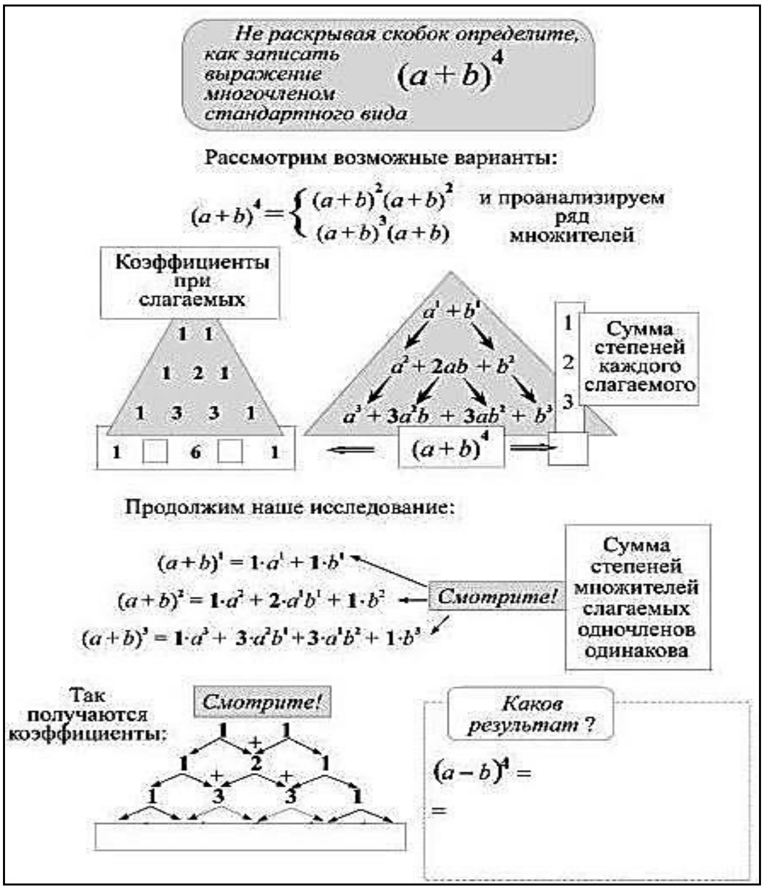
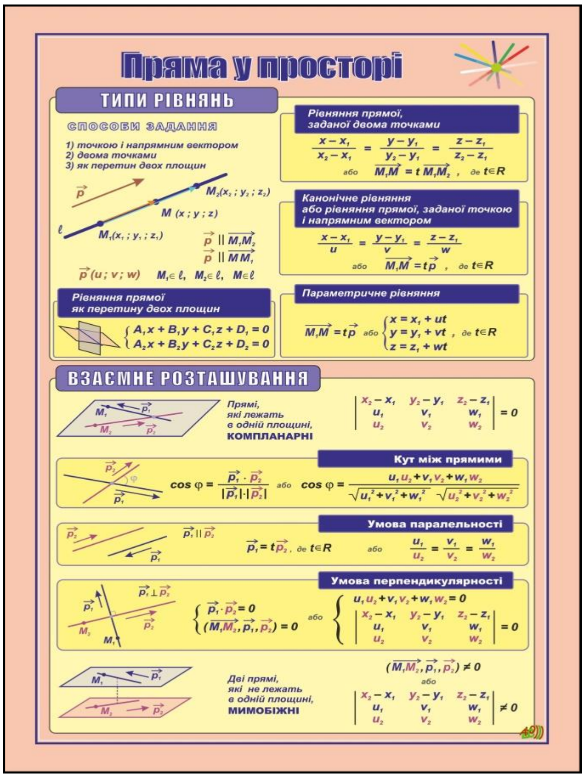


Рис. 5



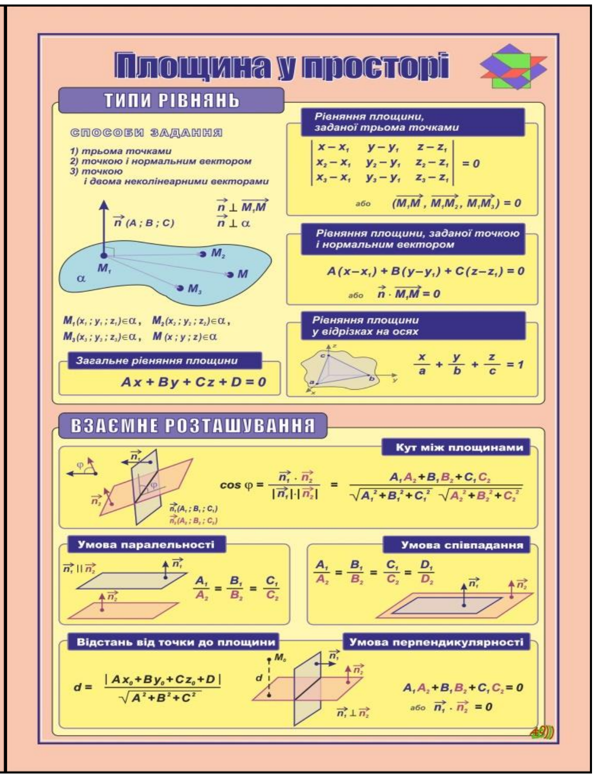


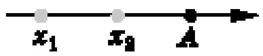
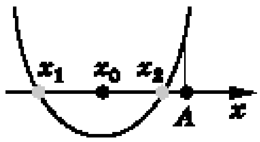
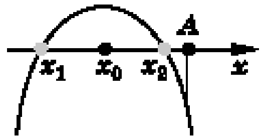
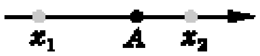
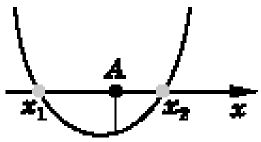
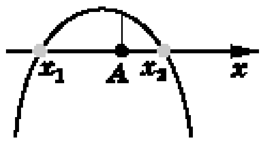
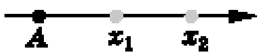
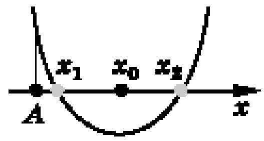
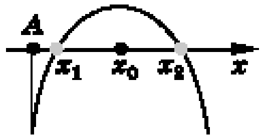
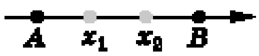
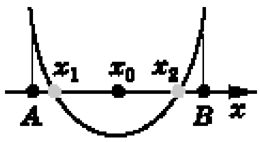
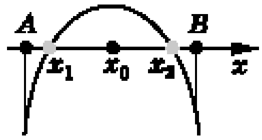
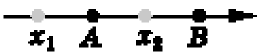
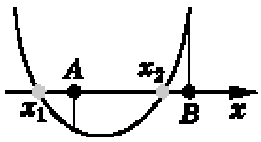
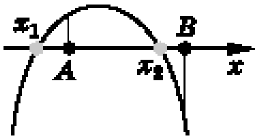
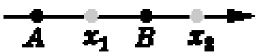
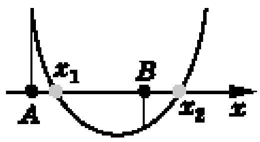
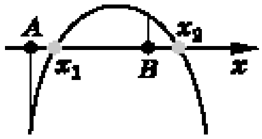
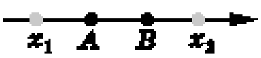
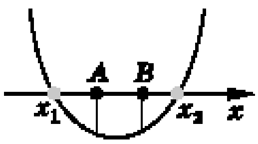
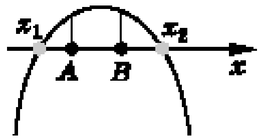
Рис. 6

Рис. 7

Приклад 8. Розташування коренів квадратного тричлена.

У таблиці 1 наведені аналітичні умови розташування коренів та їх геометрична інтерпретація.

Таблиця 1

Розміщення коренів	*Необхідні і достатні умови розміщення коренів*		
	при a>0	*при a<0*	*у загальному випадку a≠0*
1. $x_1<A$, $x_2<A$, 	$f(A)>0, D\geq0, x_0<A$ 	$f(A)<0, D\geq0, x_0<A$ 	$\begin{cases} a\cdot f(A)>0, \\ D\geq 0, \\ x_0<A \end{cases}$
2. $x_1<A<x_2$ 	$f(A)<0$ 	$f(A)>0$ 	$a\cdot f(A)<0$
3. $x_1>A$, $x_2>A$ 	$f(A)>0, D\geq0, x_0>A$ 	$f(A)<0, D\geq0, x_0>A$ 	$\begin{cases} a\cdot f(A)>0, \\ D\geq 0, \\ x_0>A \end{cases}$
4. $A<x_1<B$ $A<x_2<B$ 	$f(A)>0, f(B)>0$ $D\geq0, A<x_0<B$ 	$f(A)<0, f(B)<0$ $D\geq0, A<x_0<B$ 	$\begin{cases} a\cdot f(A)>0 \\ a\cdot f(B)>0 \\ D\geq 0 \\ A<x_0<B \end{cases}$
5. $x_1<A$ $A<x_2<B$ 	$f(A)<0, f(B)>0$ 	$f(A)>0, f(B)<0$ 	$\begin{cases} a\cdot f(A)<0 \\ a\cdot f(B)<0 \end{cases}$
6. $A<x_1<B$ $x_2>B$ 	$f(A)>0, f(B)<0$ 	$f(A)<0, f(B)>0$ 	$\begin{cases} a\cdot f(A)>0 \\ a\cdot f(B)<0 \end{cases}$
7. $x_1<A$ $x_2>B$ 	$f(A)<0, f(B)<0$ 	$f(A)>0, f(B)>0$ 	$\begin{cases} a\cdot f(A)<0 \\ a\cdot f(B)<0 \end{cases}$

2. Динамічні моделі

Приклад. Візуальні дидактичні матеріали у вигляді слайд-фільму на тему «Чудові кути першої чверті тригонометричного кола» [4].

Фільм показує, як на аркуші в клітинку за допомогою ручки і циркуля можна без транспортира досить точно побудувати чудові кути (рис.8).

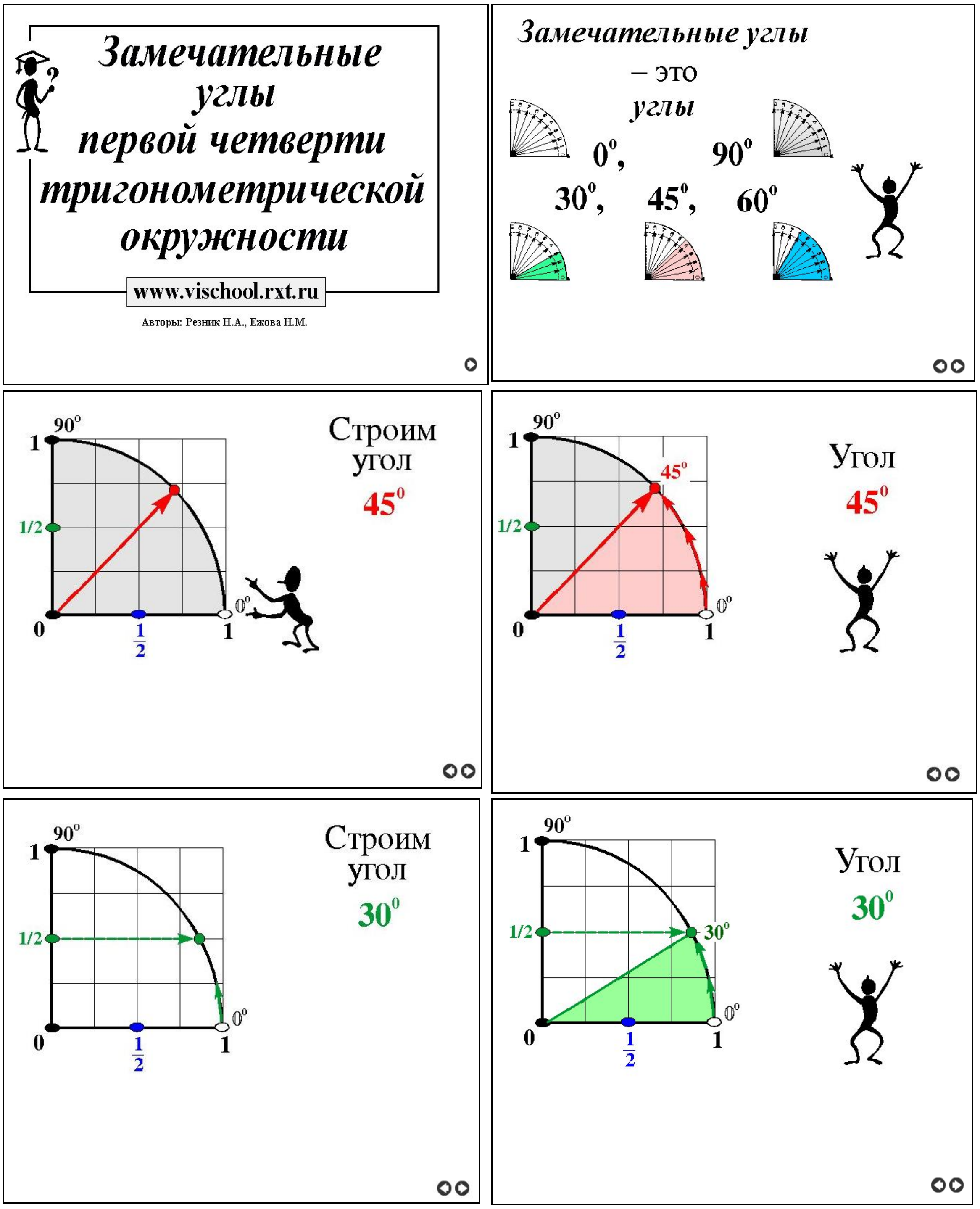
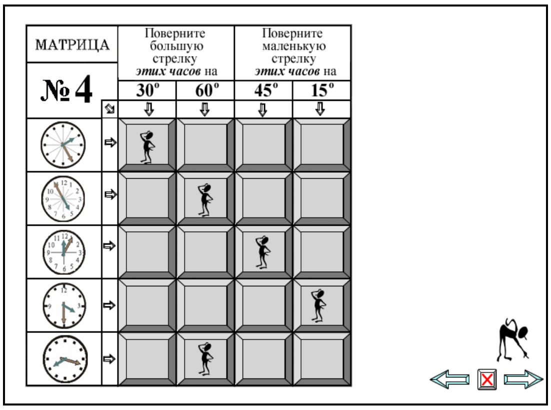


Рис. 8

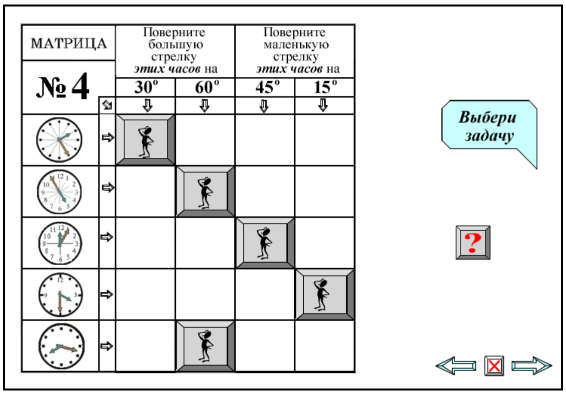
Приклад. Матриця «Гострі кути на старовинному годиннику» (рис. 9) [5].

Автор пропонує інтерактивний міні-задачник, який називає матрицею. Завдання першого рядка – найлегші, відповіді до них можуть формуватися з міркувань здорового глузду. Завдання наступних рядків поступово ускладнюються. Рівень складності завдань третього рядка відповідає стандартним завданням і прикладам шкільної програми. Четвертий і п'ятий рядки містять завдання з більш складним змістом. Таким чином, послідовно розв’язуючи приклади якого-небудь конкретного стовпця, можна удосконалювати необхідні вміння та навички. Задачі складені так, щоб їх розв’язання забезпечувалося "елементарною" розумовою операцією, не вимагало громіздких обґрунтувань, тривалих міркувань і перетворень.

а) головна сторінка

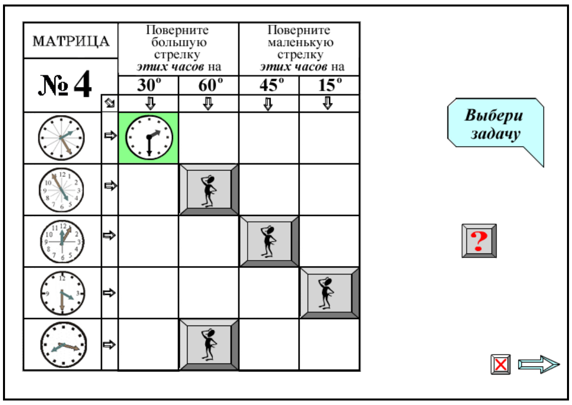


б) вибір завдань

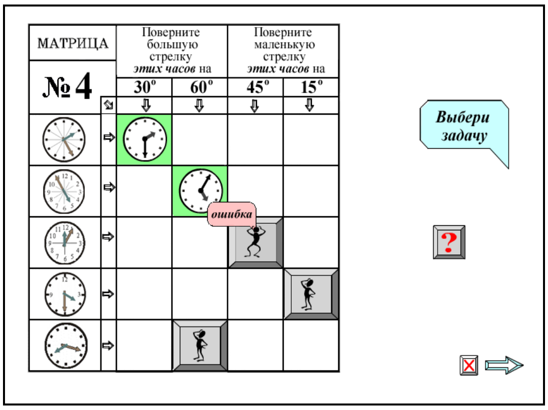


в) обрані завдання

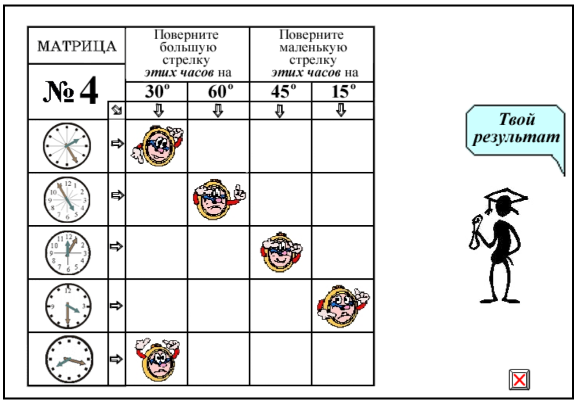
г) правильно виконане завдання



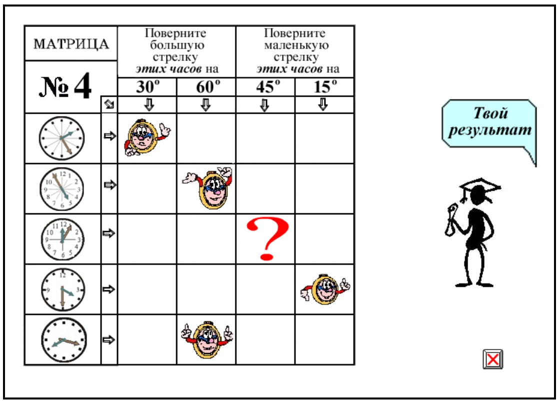
д) правильно виконане завдання



е) неправильно виконане завдання



є) результат без помилок



ж) результат з помилками

Рис. 9

3. Комп'ютерні дидактичні матеріали

Нами розроблені візуалізовані динамічні завдання, які можна виконувати у програмному середовищі математичного спрямування Математичний конструктор.

Завдяки використанню програмного середовища учні можуть переконатися у певних особливостях фігур, що робить процес візуалізації навчальної інформації більш ефективним. Пропоновані нами приклади носять дослідницький характер, тому вони можуть допомогти учням краще сприйняти матеріал, засвоїти його на емпіричному рівні та у подальшому застосовувати при виконанні завдань.

Приклад. Сума кутів будь-якого трикутника дорівнює 180º.

У ході виконання завдання учням необхідно:

1) побудувати довільний трикутник (рис. 10);
2) визначити суму його кутів;
3) змінити положення вершин трикутника (рис. 11);
4) спостерігати за сумою кутів трикутника.

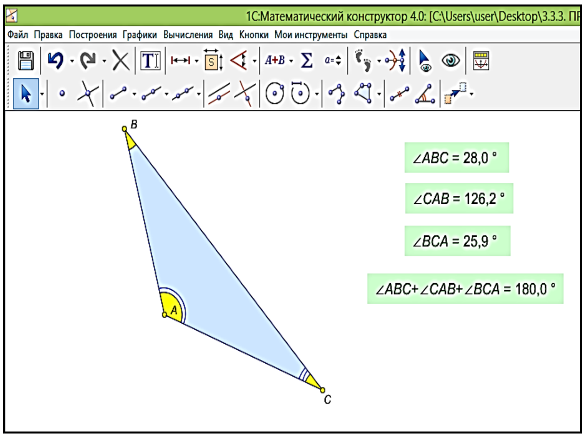


Рис. 10

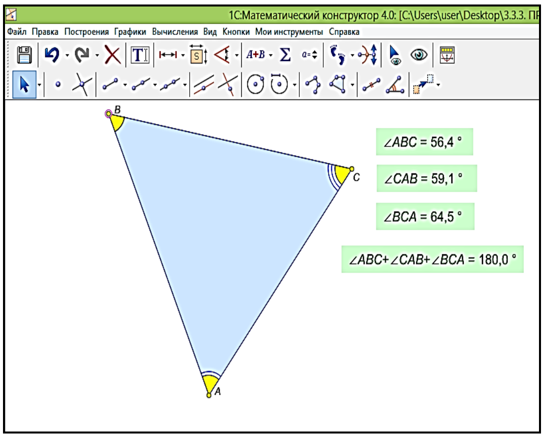


Рис. 11

Приклад. Три медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить медіани у відношенні 2:1, рахуючи від вершини.

Етапи виконання завдання:

1) побудувати довільний трикутник;
2) побудувати медіани трикутника;
3) визначити довжини медіан та відношення їх частин (рис. 12);
4) змінити положення вершин трикутника (рис. 13);
5) спостерігати за довжиною медіан та відношенням їх частин.

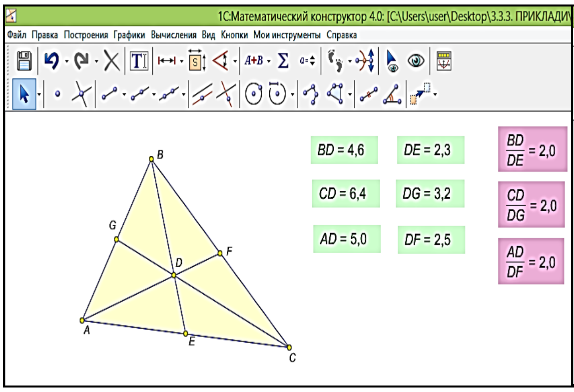


Рис. 12

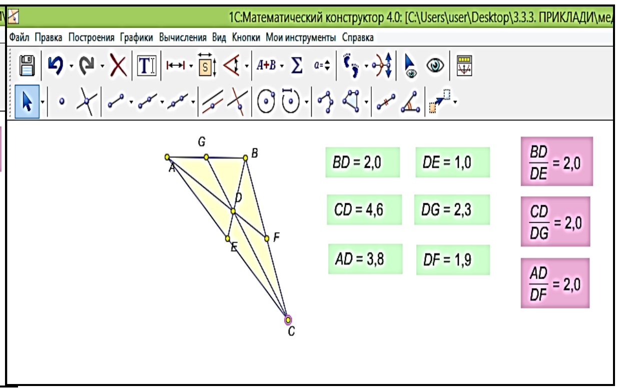


Рис. 13

Приклад. Середня лінія трикутника, яка сполучає середини двох даних сторін, дорівнює половині третьої сторони.

Для виконання завдання учням необхідно:

1) побудувати довільний трикутник;
2) побудувати середню лінію трикутника;
3) визначити відношення довжини середньої лінії трикутника до його основи (рис. 14);
4) змінити положення вершин трикутника;
5) спостерігати за відношення довжини середньої лінії трикутника до його основи (рис. 15).

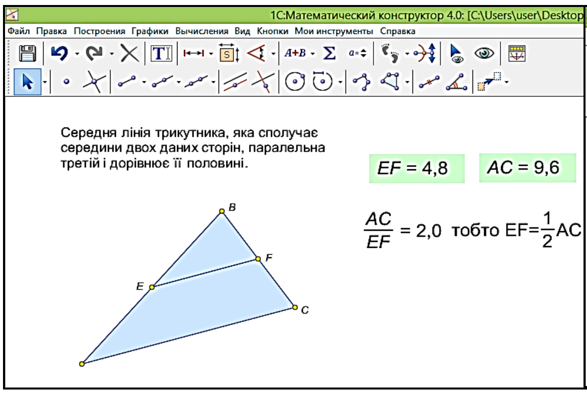


Рис. 14

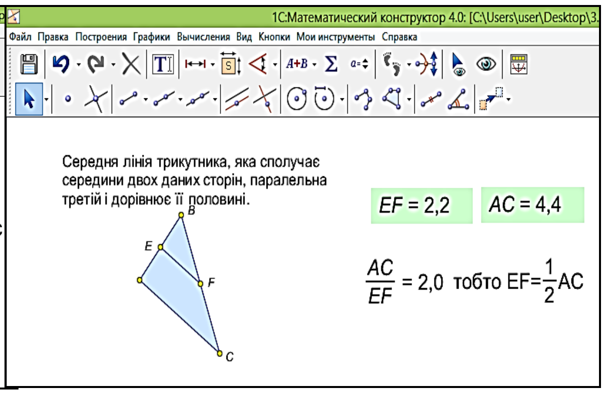


Рис. 15

Приклад. Показати, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

Виконуючи дане завдання необхідно:

1) побудувати довільний паралелограм та його діагоналі;

2) визначити значення довжин сторін та діагоналей паралелограма;

3) обчислити суму квадратів діагоналей, суму квадратів сторін паралелограма (рис. 16-17);

4) прирівняти отримані суми;

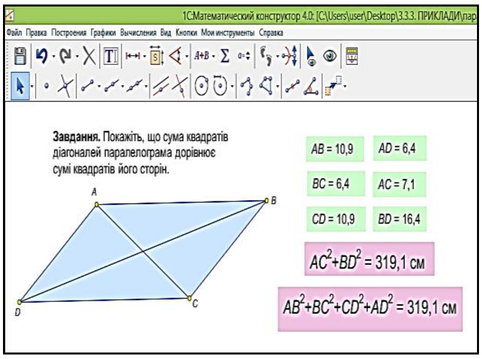


Рис. 16

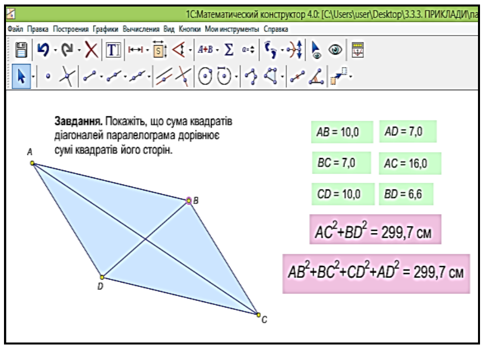


Рис. 17

5) змінити положення вершин паралелограма (рис.17);

6) спостерігати за рівністю сум.

Приклад. Побудувати:

1) медіану до сторони АС;

2) висоту, опущена з вершини С;

3) середню лінію трикутника, паралельну до сторони АС.

При виконанні даного завдання учням необхідно побудувати медіану, висоту та середню лінію трикутника лише за допомогою інструмента «Відрізок». Також є можливість одразу перевірити правильність побудови, натиснувши кнопку «Перевірити відповідь» біля відповідного завдання (рис. 18 – 20).

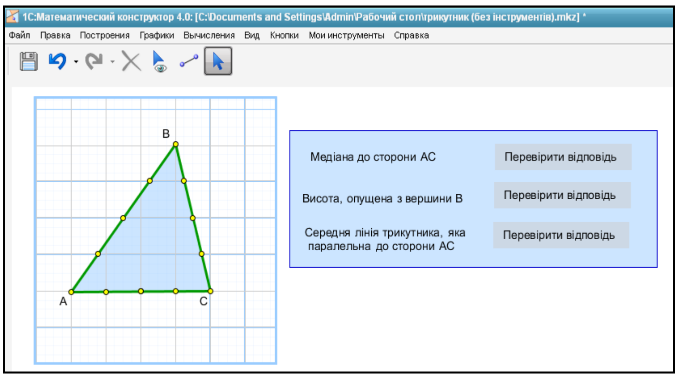


Рис. 18

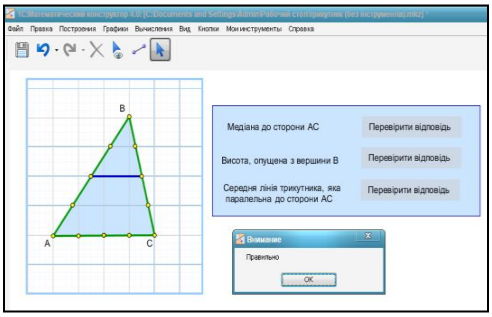


Рис. 19

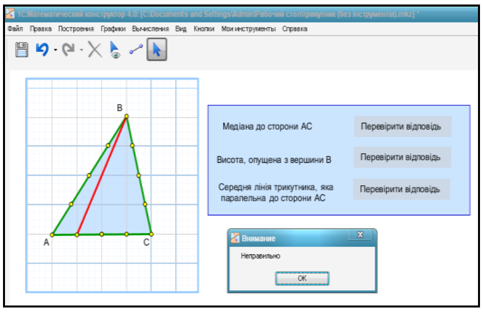


Рис. 20

Приклад. Побудувати графік функції $y = a \cdot \sin(x - b) + c$ та дослідити залежність графіка від параметрів *a*, *b*, *c*.

Виконуючи дане завдання учні можуть прослідкувати за зміною вигляду графіка в залежності від значення параметрів (рис. 21).

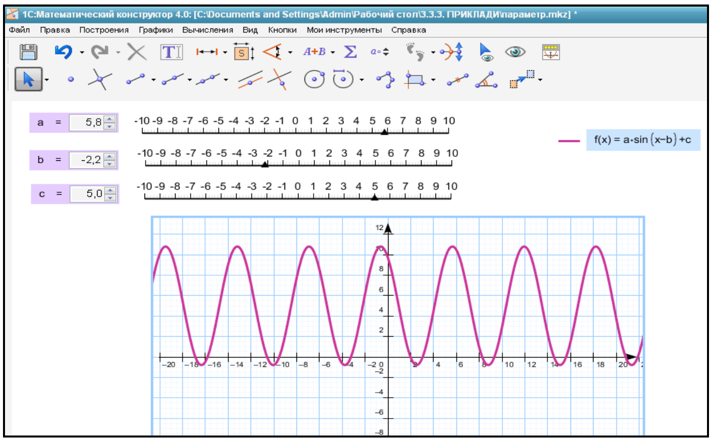


Рис. 21

Приклад. Скільки розв'язків має система $\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ в залежності від параметра *a*?

Учням необхідно за допомогою графіків функцій, змінюючи значення параметра *a,* визначити кількість розв'язків даної системи (рис. 22). Також одразу учень може перевірити себе, давши відповіді та перевірити їх правильність.

Проведене нами дослідження використання таких візуалізованих завдань дає підстави стверджувати наступне.

1. В умовах інформатизації суспільства особливого значення набуває проблема візуалізації навчального матеріалу, на основі якої можливим є розвиток візуального мислення учнів і яка виділена як один з пріоритетних напрямків розвиваючої функції математики.

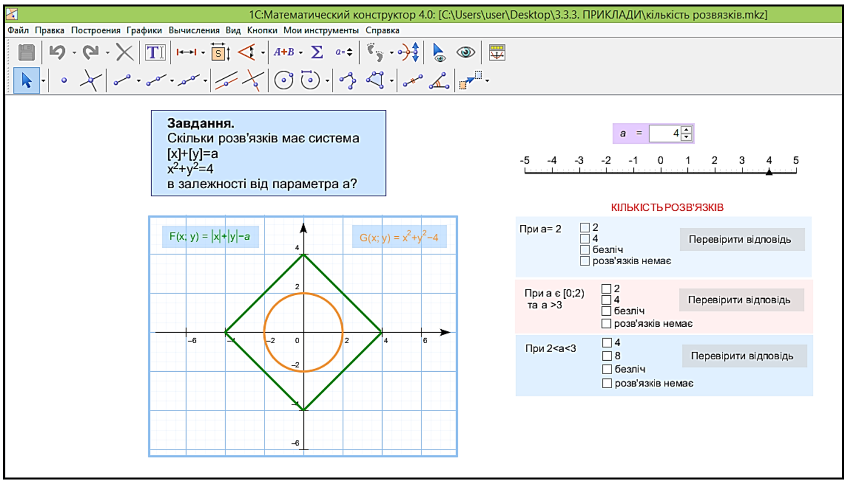


Рис. 22

2. Аналіз наукових джерел підтвердив, що застосування візуалізації є необхідною умовою успішного навчання, оскільки унаочнення навчального матеріалу підвищує ефективність уроку, допомагає подолати формалізм, пожвавлює навчальний процес, збуджує ініціативу та мислення учнів, привчає їх до аналізу та узагальнення. Уміле використання візуалізації у процесі навчання сприяє розвитку самостійності, активності, творчої пізнавальної діяльності учнів, що значною мірою забезпечує підготовку їх до самостійної практичної роботи.

3. Навчання математики часто спирається на наочні образи, тому природною буде побудова процесу навчання на основі когнітивно-візуального (візуально-пізнавального) підходу, що дозволяє максимально використовувати потенційні можливості візуального мислення. Одна з центральних ідей такого підходу – широке і цілеспрямоване використання пізнавальної функції наочності. Когнітивно-візуальний підхід будується на активному і цілеспрямованому використанні резервів візуального мислення, він припускає перенесення пріоритету з ілюстративної функції наочності на її пізнавальну функцію, тим самим забезпечуючи перенесення акценту з навчальної функції на розвиваючу.

4. Когнітивно-візуальний підхід у навчанні математики можна реалізувати, використовуючи різні форми візуального подання навчального матеріалу – графи, продуктивні моделі, логічні моделі, когнітивно-графічні елементи «Будівля» та «Дерево», фреймові моделі, конспект-схеми, опорні конспекти, карти пам’яті тощо. Крім цього можна використовувати програмні засоби математичного спрямування, які допомагають не тільки візуалізувати навчальну інформацію, а й зацікавити учнів вивченням математики.

5. Пропоновані у статті приклади формують навички роботи з графічною інформацією. Розвиваючи візуальне мислення, вони фіксують увагу при засвоєнні навчального матеріалу, неявно і опосередковано сприяючи згортанню розумових змістів у наочний образ, забезпечуючи формування більш повного уявлення про образ або поняття.

6. Дидактично вивірене використання форм візуального подання навчального матеріалу у навчанні математики може перетворити візуалізацію з допоміжного у провідний продуктивний засіб математичного розвитку учнів.

Список використаних джерел

1. Далингер В.А. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений: кн. для учителя / В.А. Далингер. – М.: Просвещение, 2006. – 256 с.
2. Резник Н.А. Визуальное мышление в обучении. Методические основы обучения математике с использованием средств развития визуального мышления / Н.А.Резник. – [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://www.vischool.rxt.ru/texts/monogr/germany_2012.htm. – Назва з екрану
3. Семеніхіна О.В. З досвіду створення стендових матеріалів / О.В. Семеніхіна // Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології. – Суми : Вид-во СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2013. – №2 (28). – С. 312-321
4. Візуальні дидактичні матеріали «Перша четверть тригонометричного кола». – [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://www.vischool.rxt.ru/matem/trigonom/1/film1.htm. – Назва з екрану
5. Резник Н.А., Павлов Н.А. Комплект компьютерных мини-задачников "Острые углы на старинных часах" программной коллекции "Визуальная планиметрия". №50200701498 / ВНИТЦ. – М., 2007.
6. Elena Semenikhina. Development of Dynamic Visual Skills SKM MAPLE among Future Teachers // European Journal of Contemporary Education. – 2014. – Vol.(10), № 4. – Pp. 265-272. – режим доступу: http://ejournal1.com/journals_n/1417761453.pdf
7. Семеніхіна О., Юрченко А. Уміння візуалізувати навчальний матеріал засобами мультимедіа як фахова компетентність учителя // Науковий вісник Ужгородського національного університету: Серія «Педагогіка. Соціальна робота». – Ужгород : Видавництво УжНУ «Говерла». – Випуск 33. – 2014. – С. 176-179.

Анотація. Шевченко І. Приклади візуалізації у навчанні математики.

У статті обґрунтовано доцільність використання візуалізації як актуальної технології навчання математики. Розглянуто візуалізовані завдання трьох типів: статичні схеми, динамічні моделі та комп’ютерні дидактичні матеріали, які пропонуються науковцями або є авторськими. Розв’язання таких завдань базуються на використанні геометричних тлумачень математичних понять, асоціативних зв’язках через колір чи форму об’єктів та їх кількісних або аналітичних характеристик та динамічній візуалізації змін певних параметрів та відповідних їм конструкцій.

Ключові слова: візуалізація, когнітивна візуалізація, динамічна візуалізація, динамічні моделі.

Аннотация. Шевченко И. Примеры визуализации в обучении математике.

В статье обоснована целесообразность использования визуализации как актуальной технологии обучения математике. Рассмотрены визуальные задачи трех типов: статические схемы, динамические модели и компьютерные дидактические материалы, которые предлагаются учеными-методистами или являются авторскими. Решение таких задач базируются на использовании геометрических толкований математических понятий, ассоциативных связях по цвету или форме объектов, количественных или аналитических характеристик, и динамической визуализации изменений определенных параметров и соответствующих им конструкций.

Ключевые слова: визуализация, когнитивная визуализация, динамическая визуализация, динамические модели.

Abstract. Shevchenko I. Examples of visualization in learning mathematics.

The article touches upon the feasibility of using imaging technology as the actual teaching technology in mathematics. In article is considered the tasks of visualization three types: static circuits, dynamic models and computer teaching materials that are offered scientists and autor. Solving such problems based on the geometric interpretation of mathematical concepts, associative relations on the color or shape of objects and their quantitative or analytical presentations and visualization of dynamic changes of certain parameters and corresponding structures.

Keywords: visualization, cognitive visualization, dynamic visualization, dynamic models.